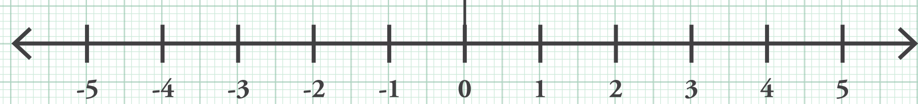
At Right Angles

A Resource for School Mathematics

समीकरण के लिए पद्धतियाँ

पद्मप्रिया शिराली



Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

परिचय

किसी जटिल विषयवस्तु से बच्चों का परिचय कराना हमेशा चुनौतीपूर्ण होता है। यदि आप विषयवस्तु को बच्चे के दैनिक अनुभव से जोड़ना चाहते हैं, तो आपको एक ऐसे ठोस मॉडल का चयन करने के लिए मजबूर होना पड़ता है, जो इस उद्देश्य को पूरा करता हो। लेकिन सम्भव है कि वह मॉडल कुछ सीमित अवसरों पर ही काम आए। और कभी-न-कभी अवधारणा की व्यापक समझ बनाने के लिए बच्चे को सामान्य धारणा के सार को समझने की आवश्यकता होगी ही।

'समीकरण' की अवधारणा को बच्चों को कई पद्धतियों से बताया जा सकता है। हमारे द्वारा चुनी गई पद्धति का उस वैचारिक छवि पर गहरा प्रभाव पड़ता है जो एक बच्चा दी गई अवधारणा के बारे में बनाता है। इसलिए अवधारणा को समझने के साथ-साथ सवालों को हल करने की प्रक्रिया विकसित करने में बच्चे की मदद करने हेतु पद्धति का चुनाव बहुत महत्त्वपूर्ण है।

हालाँकि, हर पद्धति की अपनी सीमाएँ हैं और उसका उपयोग केवल कुछ प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए किया जा सकता है। उसका उपयोग सीमित है और समस्याओं के प्रकार या कठिनाई के बदल जाने पर बच्चों को अन्य पद्धतियों से अवगत कराना आवश्यक हो सकता है।

शिक्षकों को इसके लिए कुछ महत्त्वपूर्ण निर्णय लेने होते हैं, जैसे कि अवधारणा का परिचय कब और कैसे कराया जाए और सम्बन्धित कौशलों पर कितना ज़ोर दिया जाए।

समीकरण विभिन्न प्रकार की समस्याओं को समाहित करते हैं। इसके कुछ उदाहरण यहाँ दिए गए हैं :

$x + 5 = 7$, $2(x + 10) - 3x = 16$, $2x + 3 = 3x - 7$,

$2x + 3y = 11$, $3x + 2y = 14$, $x2 + 6x + 9 = 0$, $2x = x2$

ज़ाहिर है, इन समस्याओं को हल करने की प्रक्रियाएँ बहुत भिन्न होती हैं।
समीकरणों (औपचारिक परिभाषा का प्रयोग किए बिना) की अवधारणा से बच्चों का परिचय कैसे कराएँ? एक बीजगणितीय समीकरण में चरों का उपयोग करते हुए एक समता होती है।

इस लेख में मैं दो प्रसिद्ध पद्धतियों 'सन्तुलन पद्धति' और 'मशीन पद्धति' पर ध्यान केन्द्रित कर रही हूँ।

सन्तुलन पद्धति मूलत: तराज़ू की समरूपता (analogy) का उपयोग करती है।

सन्तुलन की स्थिति के लिए तराज़ू के बाएँ पलड़े का वज़न दाएँ पलड़े के वज़न के बराबर होना चाहिए।

इसी तरह, एक समीकरण में दोनों पक्षों के व्यंजकों का मान बराबर होता है। दोनों पक्षों के व्यंजक समान नहीं दिखते हैं, लेकिन जब उन्हें एक मान के लिए हल किया जाता है तो वे समान होते हैं।

हम सरल समीकरणों के लिए सन्तुलन पद्धति से एक मॉडल बना सकते हैं।

मशीन पद्धति 'x' को एक इनपुट के रूप में मानती है, जिस पर एक निश्चित क्रम में एक या एक से अधिक संक्रियाएँ की जाती हैं ताकि आउटपुट प्राप्त किया जा सके।

यह दोनों पद्धतियाँ अन्तत: बच्चे को यह समझने में मदद करती हैं कि समीकरण क्या है और किसी समस्या को दर्शाने के लिए समीकरण कैसे बनाएँ। साथ ही यह एक चर (एक अज्ञात) वाले समीकरणों को हल करने और प्रतीकों का उचित उपयोग करने में भी मदद करती हैं।

यह महत्त्वपूर्ण है कि समीकरण बनाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद करने के लिए शिक्षक शुरुआत से ही पर्याप्त मात्रा में समय

लगाएँ। इस क्षमता को विकसित करने के लिए, जहाँ भी सम्भव हो दृश्य संसाधनों का उपयोग करना और दैनिक जीवन की समस्याओं का चयन कर उन्हें सरल भाषा में प्रस्तुत करना अच्छा होता है। शिक्षक को समीकरणों को बनाने और समस्या-समाधान की प्रक्रियाओं पर समान रूप से ध्यान देने की आवश्यकता है।

समस्या-समाधान के सम्बन्ध में ध्यान देने लायक एक और महत्त्वपूर्ण बात यह है कि बच्चे समस्याओं को हल करने के लिए अन्य विधियों का उपयोग कर सकते हैं; उदाहरण के लिए, प्रयत्न और त्रुटि। कुछ विधियाँ काफ़ी लम्बी होती हैं और इसलिए उबाऊ हो सकती हैं। पर किसी भी परिस्थिति में शिक्षक को इन विधियों को ख़ारिज नहीं करना चाहिए। शिक्षक इस बात को स्वीकार कर सकते हैं कि ये विधियाँ भी मान्य हैं और मानक और प्रभावी तरीक़ों को दिखाने के बाद वे इस पर काम कर सकते हैं।

मुख्य शब्द : *बीजगणित, भाषा, सन्तुलन, मशीन, समता, समाधान*

सन्तुलन पद्धति - गतिविधि 1

उद्देश्य : यह प्रदर्शित करना कि दोनों पलड़ों में किए गए समान परिवर्तन किस तरह तराज़ू के सन्तुलन स्तर को बनाए रखते हैं।
सामग्री : दो पलड़ों वाला तराज़ू, विभिन्न वज़न के बाँट : 50 ग्राम, 100 ग्राम, 500 ग्राम



तराज़ू को सन्तुलन की स्थिति में लाने के लिए बच्चों से कुछ वज़न रखने को कहें।

उनसे पूछें कि यदि बाएँ पलड़े से 100 ग्राम वज़न हटा दिया जाए तो क्या होगा?

तराज़ू कैसा दिखेगा? (कौन-सा पलड़ा नीचे झुकेगा?)

तराज़ू को सन्तुलन की स्थिति में लाने के लिए तुम्हें दाएँ पलड़े पर क्या करना चाहिए?

अब दाएँ पलड़े में 500 ग्राम वज़न रखने का प्रयास करें।

अब तराज़ू कैसा दिखता है?

तराज़ू को सन्तुलन की स्थिति में लाने के लिए बाएँ पलड़े पर क्या किया जाना चाहिए?

अब तराज़ू के बाएँ पलड़े के वज़न को आधा कर दें।

तराज़ू को सन्तुलन की स्थिति में लाने के लिए दाएँ पलड़े पर क्या करने की आवश्यकता है?

इसी तरह, एक पलड़े पर तीन गुना वज़न रखने की कोशिश करें और देखें कि दूसरे पलड़े में क्या करना है।

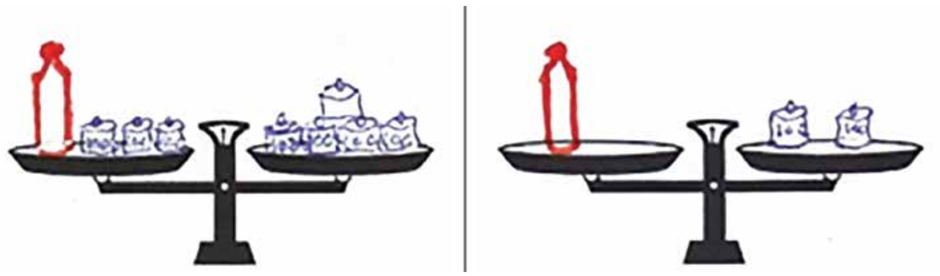
नोट : बच्चों को इस गतिविधि से परिचित कराने का उद्देश्य उन्हें यह समझने में मदद करना है कि सन्तुलन की स्थिति एक पक्ष में किए गए किसी भी परिवर्तन से प्रभावित होती है और दूसरे पक्ष में उसी क्रिया द्वारा इसकी भरपाई करना आवश्यक होता है।

गतिविधि 2

उद्देश्य : दी गई परिस्थिति के लिए एक संक्रिया वाले समीकरण बनाना और समीकरण को सन्तुष्ट करने वाले मान को तलाशना सीखने में बच्चों की मदद करना।

सामग्री : बोतलें अथवा समान प्रकार के पैकेट और 100 ग्राम के बाँट

नोट : शिक्षक बोर्ड पर इनके प्रतीकात्मक चित्र भी बना सकते हैं जैसे कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है।



चित्र में बाएँ पलड़े में एक बोतल और 100 ग्राम वज़न के तीन बाँट और दाएँ पलड़े में 100 ग्राम वज़न के पाँच बाँट दिखाई दे रहे हैं।

अब बच्चों से पूछें : बाएँ पलड़े में तुम्हें क्या दिखाई दे रहा है?

क्या हम बोतल का वज़न जानते हैं? हम इसके वज़न को क्या कहेंगे? चूँकि अज्ञात मात्रा को दर्शाने के लिए एक चर के रूप में 'x' अक्षर का उपयोग करने के विचार से बच्चों को पहले ही अवगत कराया जा चुका है, इसलिए उन्हें इस स्थिति में इसके उपयोग को स्वीकार करने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

दाएँ पलड़े में हमें क्या दिखाई दे रहा है?

क्या तराज़ू सन्तुलन की स्थिति में है?

हम एक समीकरण के रूप में इस सारी जानकारी को कैसे लिख सकते हैं?

$x + 300 = 500$

बोतल का वज़न कितना होगा?

बच्चों को इस प्रश्न का उत्तर तुरन्त देने में सक्षम होना चाहिए।

हालाँकि, शिक्षक को उन्हें प्रतिलोम संक्रिया (inverse operation) से भी परिचित कराना चाहिए।

नोट : शिक्षक को इस समय पर चारों बुनियादी संक्रियाओं के लिए 'प्रतिलोम संक्रिया' के बारे में बताना चाहिए और इस पर चर्चा करनी चाहिए। सन्तुलन की स्थिति बनाए रखने के लिए दोनों तरफ़ से 300 ग्राम हटाया जा सकता है।

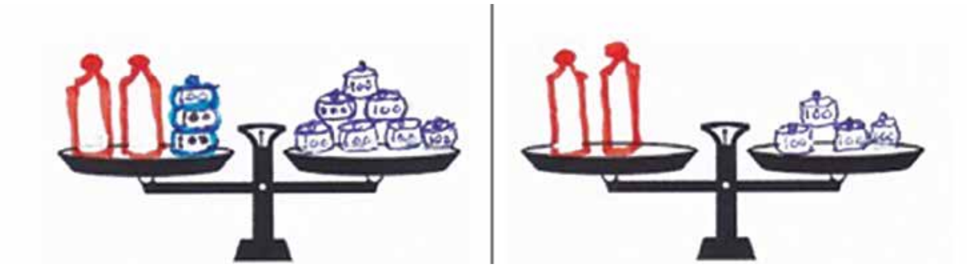
$$x + 300 - 300 = 500 - 300$$

इसलिए, $x = 200$

अगले स्तर पर जाने से पहले शिक्षक अन्य संक्रियाओं को शामिल करते हुए इस तरह के और सवालों को भी हल करवा सकते हैं।

गतिविधि 3

उद्देश्य : दी गई परिस्थिति के लिए दो संक्रियाओं वाले समीकरण बनाना और उसे सन्तुष्ट करने वाले मान को तलाशना सीखने में बच्चों की मदद करना।



इस चित्र में बाएँ पलड़े में 2 बोतलें और 100 ग्राम वज़न के तीन बाँट और दाएँ पलड़े में 100 ग्राम वज़न के सात बाँट दिखाई दे रहे हैं। हम इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में कैसे दर्शाएँ?

फिर से, बोतल के वज़न के बारे में अज्ञात 'x' के रूप में बात करें और समीकरण बनाने में बच्चों की मदद करें।

$2x + 300 = 700$

बोतल का वज़न क्या होगा जो यहाँ x द्वारा दर्शाया गया है?

बच्चों को यह समझने की आवश्यकता है कि 'x' प्रत्येक स्थिति में एक निश्चित मात्रा को दर्शाता है।

कुछ बच्चे मन-ही-मन गणनाएँ करके इसका उत्तर जानने में सक्षम हो सकते हैं।

प्रतिलोम संक्रिया की प्रक्रिया का पालन करके अपने उत्तर को जाँचने में उनकी मदद करें।

दृश्य साधन बच्चों को यह सोचने में मदद करते हैं कि दोनों पक्षों से क्या हटाया जा सकता है।

$2x + 300 - 300 = 700 - 300$ (जोड़ का प्रतिलोम घटाव है)

ध्यान दिलाएँ कि +300 और -300 एक-दूसरे को रद्द करते हैं।

$2x \div 2 = 400 \div 2$ (गुणन का प्रतिलोम भाग है)

इसलिए $x = 200$

शुरुआती चरण में, बच्चों को अपने काम के हिस्से के रूप में प्रतिलोम संक्रियाओं का उपयोग करना चाहिए। बाद में वे इसे केवल एक पक्ष में लिखकर समतुल्यता को देख सकते हैं क्योंकि दूसरे पक्ष में तो यह अनिवार्य रूप से रद्द हो जाएगी। यानी कि

$2x + 300 - 300 = 700 - 300$

लिखने के बजाय, वे लिखेंगे

$2x = 700 – 300$

अगले स्तर पर जाने से पहले शिक्षक अन्य संक्रियाओं को शामिल करते हुए इस तरह के और सवाल हल करवा सकते हैं।

नोट : कुछ सवालों पर काम करने के बाद शिक्षक समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में संख्याओं व चरों के स्थानापन्न (transposing) को दिखा सकते हैं।

गतिविधि 4

उद्देश्य : बच्चों को ऋणात्मक गुणांकों, भिन्नों और दशमलव वाले चरों से युक्त विभिन्न प्रकार के समीकरणों से अवगत कराना।

हम इसे कैसे हल करेंगे? (यहाँ पर चर दाईं ओर है।)

$10 = x - 32$

इस बात की ओर ध्यान दिलाएँ कि यदि व्यंजकों को आपस में बदल दिया जाए तो समीकरण समान रहता है। (यह तराज़ू को दो तरफ़ से देखने जैसा है; जब दर्शक अपनी जगह बदलता है, तो बायाँ पलड़ा दाईं ओर और दायाँ पलड़ा बाईं ओर हो जाता है।)

इसे $x - 32 = 10$ के रूप में लिखा जा सकता है और सामान्य तरीक़े से हल किया जा सकता है।

हम इसे कैसे हल करेंगे? (यहाँ चर ऋणात्मक चिह्न के साथ है।)

$$12 - x = 5$$

नोट : शायद बच्चे अभी ऋणात्मक गुणांकों वाले चरों के साथ काम करने के लिए तैयार न हों।

इस ओर उनका ध्यान आकर्षित करें कि $-x$ को $+x$ का उपयोग करके रद्द किया जा सकता है।

$$12 - x + x = 5 + x,$$

$$12 = 5 + x$$

इसे $5 + x = 12$ के रूप में लिखा जा सकता है और सामान्य तरीक़े से हल किया जा सकता है।

बेहतर होगा कि भिन्नों और दशमलव वाले समीकरणों से भी बच्चों का परिचय कराया जाए

$$x + 1.5 = 4,$$

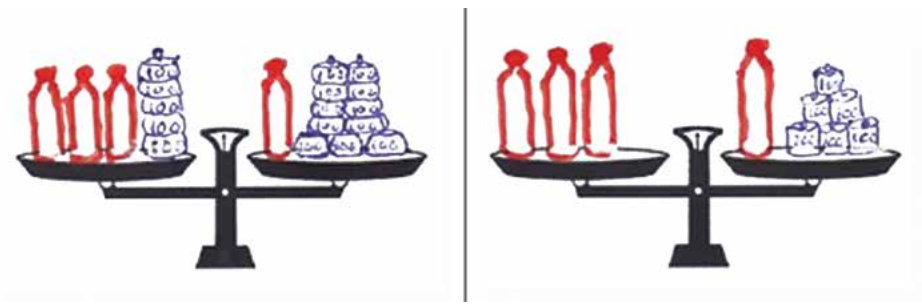
$$a - \frac{1}{2} = 7,$$

$$\frac{1}{2}b = 16,$$

$$\frac{5}{4}y = 10.$$

गतिविधि 5

उद्देश्य : ऐसी परिस्थितियों के लिए समीकरण बनाना सीखने में बच्चों की मदद करना, जिनमें दोनों ओर अज्ञात राशि हों।



यहाँ दिए गए चित्र में 3 बोतलें और 100 ग्राम वज़न के पाँच बाँट बाएँ पलड़े में और 1 बोतल और 100 ग्राम वज़न के ग्यारह बाँट दाएँ पलड़े में दिखाए गए हैं।

क्या बच्चे यह देख पाते हैं कि बाएँ पलड़े और दाएँ पलड़े की बोतलें समान हैं और इस कारण से उनका वज़न भी समान होगा।

हम इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में कैसे दर्शाएँ?

$3x + 500 = x + 1100$

बच्चों से पूछें, 'तुम इसे हल करने के लिए पहले क्या करोगे?'

इस समस्या को पहले 500 के लिए प्रतिलोम संक्रिया करके हल किया जा सकता है या फिर पहले तराज़ू के दोनों तरफ़ से x (एक बोतल!) को हटाकर भी इसे हल किया जा सकता है।

बच्चों के लिए यह देखना अच्छा होगा कि दोनों में से किसी भी तरीक़े से शुरू करने से हल पर कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता है।



विधि 1 :

$3x + 500 - 500 = x + 1100 - 500,$

$3x = x + 600,$

$3x - x = x + 600 - x,$

$2x = 600,$

$x = 300$

विधि 2 :

$3x + 500 - x = x + 1100 - x,$

$2x + 500 = 1100,$

$2x + 500 - 500 = 1100 - 500,$

$2x = 600,$

$x = 300$

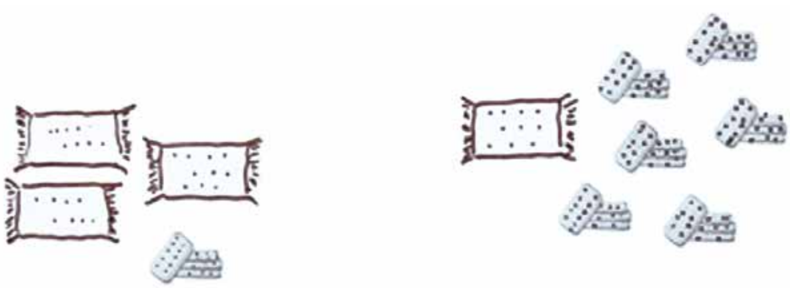
अगले स्तर पर जाने से पहले शिक्षक अन्य संक्रियाओं को शामिल करते हुए इस तरह के और सवालों को हल करवा सकते हैं।

गतिविधि 6

उद्देश्य : दृश्य और इबारती सवालों वाली विविध परिस्थितियों के लिए समीकरण बनाना सीखने में बच्चों की मदद करना।।



प्रत्येक वैन में समान संख्या में लोग हैं।
यदि दोनों तरफ़ लोगों की संख्या बराबर है, तो वैन में कितने लोग हैं?



प्रत्येक पैकेट में बिस्कुट की संख्या समान है।
यदि दोनों तरफ़ बिस्कुट की संख्या समान है, तो प्रत्येक पैकेट में कितने बिस्कुट हैं?

गतिविधि 7

उद्देश्य : इबारती सवाल बनाकर बच्चों को समीकरणों की अपनी समझ को प्रदर्शित करने का मौक़ा देना।

बच्चों को नीचे दिए गए विभिन्न प्रकार के कुछ समीकरण दें और उनसे उनके लिए इबारती सवाल बनाने को कहें।

समीकरण $4x = 8$ द्वारा दर्शाए गए इबारती सवाल के बारे में सोचें।

समीकरण $(4x - 2) + 7 = 33$ द्वारा दर्शाए गए इबारती सवाल के बारे में सोचें।

समीकरण $5\ (x - 3) = 20$ द्वारा दर्शाए गए इबारती सवाल के बारे में सोचें।

गतिविधि 8

उद्देश्य : समीकरणों की समतुल्यता, उत्तर की शुद्धता की जाँच करने के तरीक़े के रूप में प्रतिस्थापन (substitution) और व्यंजकों के पारस्परिक बदलाव को समझना।

शिक्षक को इस बात का ध्यान रखने की आवश्यकता है कि बच्चों ने निम्नलिखित बिन्दुओं को समझ लिया है।

क्या वे देख पाते हैं कि यह सभी समीकरण समान हैं?

$3x = 6,$

$6 = 3x,$

$3x = 2 + 4$

बच्चे इस बात को कैसे जाँचेंगे कि सही उत्तर प्राप्त हुआ है?

शिक्षक को उत्तर की जाँच के तरीक़े के रूप में प्रतिस्थापन के बारे में बताना होगा।

क्या वे यह देख पाते हैं कि दोनों पक्षों को एक-दूसरे से बदलने पर समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है?

उदाहरण के लिए : $2x + 7 = 3x - 2$ और $3x - 2 = 2x + 7$ समान है।

समीकरणों के लिए पूछे जाने वाले प्रश्नों में अक्सर विभिन्न प्रकार के शब्द प्रयुक्त किए जाते हैं।

उदाहरण : x के लिए हल करें।

क्या बच्चे यह देख पाते हैं कि किसी समीकरण को हल करने का मतलब अज्ञात राशि का मान ज्ञात करना है?

x का कौन-सा मान इस समीकरण को सन्तुष्ट करेगा?

मशीन पद्धति

अब मैं समीकरणों का परिचय कराने के लिए *मशीन पद्धति* पर बात करने जा रही हूँ। मशीन पद्धति का स्वतंत्र रूप से उपयोग किया जा सकता है क्योंकि यह बच्चों को अनुक्रमिक तरीक़े से समीकरण बनाने के तरीक़े की कल्पना करने और उन्हें हल करने के लिए 'पूर्ववत करने' (undoing) की प्रक्रिया को समझने में मदद करती है। हालाँकि, मशीन पद्धति ऐसे सवालों के लिए बहुत उपयुक्त होती है जिनमें एक पक्ष में एकल चर व्यंजक और दूसरे पक्ष में एक संख्या हो।

शिक्षक इस खेल को बच्चों के साथ खेल सकते हैं। बच्चों को यह जानने का मौक़ा दें कि गतिविधि 9 को पूरा करने के बाद शिक्षक ने क्या किया था।

खेल 1 : मैं आपकी संख्या का पता लगा सकता/सकती हूँ!

शिक्षक : एक संख्या के बारे में सोचें → संख्या में 5 जोड़ें →

4 से गुणा करें → 2 घटाएँ

आपका जवाब क्या है?

बच्चे : '38'

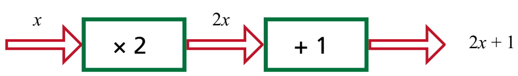
शिक्षक : आपका नम्बर 5 है।

गतिविधि 9

उद्देश्य : दो चरणों वाली मशीन में किए गए कार्य को 'पूर्ववत करना' सीखने में बच्चों की मदद करना।

शिक्षक चित्र में बताए अनुसार बोर्ड पर एक इनपुट-आउटपुट मशीन बना सकते हैं।

यहाँ एक इनपुट-आउटपुट मशीन दी गई है। यह इनपुट के रूप में एक संख्या लेती है और उस पर दो संक्रियाएँ करने के बाद आउटपुट के रूप में एक संख्या देती है।



इस मशीन की इनपुट-आउटपुट तालिका देखें।

5	11
3	7
12	25
7	15

यह मशीन क्या करती है? इसकी दो संक्रियाएँ क्या हैं?

बच्चे जल्दी ही यह देख लेंगे कि प्रत्येक संख्या में पहले 2 से गुणा होता है और फिर उसमें 1 जोड़कर उत्तर यानी आउटपुट प्राप्त किया जाता है।

अब बच्चों के सामने यह सवाल रखें कि 'अगर इस मशीन का आउटपुट 29 है, तो इनपुट क्या होगा?'

एक बार फिर, बच्चे मन-ही-मन गणना करके इसका उत्तर दे सकते हैं।

उन्हें इसके लिए एक समीकरण बनाने के लिए प्रोत्साहित करें।

यदि इनपुट 'y' है तो

$y \times 2 + 1 = 29$

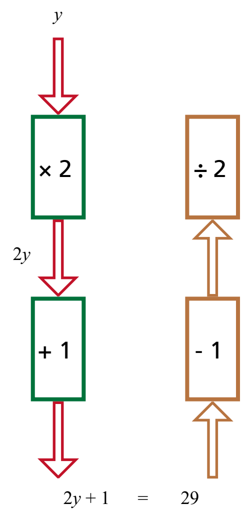
कुछ बच्चे ऊपर से नीचे की ओर जाने वाली मशीनें बनाना पसन्द करते हैं। वे इन चित्रों पर पूर्ववत करने की प्रक्रिया का अभ्यास कर सकते हैं।

$2y + 1 = 29$

इस समीकरण को विपरीत दिशा में जाकर या जो किया गया है उसे पूर्ववत करके हल करना सम्भव है।

मशीन द्वारा की गई अन्तिम संक्रिया '1 जोड़ना' थी। इसे पूर्ववत करने के लिए, 1 को 29 से घटाया जाना चाहिए।

$29 - 1 = 28$



इसके पहले की संक्रिया में 2 से गुणा किया गया था। इसे पूर्ववत करने के लिए, 28 को 2 से भाग करना होगा।

$28 \div 2 = 14$

इससे हमें 14 मिलता है।

विभिन्न संक्रियाओं वाले इस तरह के और उदाहरणों पर काम किया जा सकता है।

खेल 2 : क्या बच्चे अब यह पता लगा सकते हैं कि शिक्षक ने खेल 1 में उनकी संख्या का पता कैसे लगाया था?

अब बच्चों से 'एक संख्या के बारे में सोचें' खेल (चार या पाँच संक्रियाओं वाले) के लिए ऐसे निर्देश देने को कहें, जिन्हें वे शुरुआती संख्या बताने के लिए पूर्ववत कर सकते हों।

उन्हें संक्रियाओं की इस शृंखला को दिखाने के लिए चित्र बनाने को कहें।

नोट : समीकरण लिखते समय संक्रियाओं के कुछ संयोजनों के लिए कोष्ठक के उपयोग की आवश्यकता होगी। ऐसी स्थितियों में कोष्ठक की आवश्यकता और उपयोग पर चर्चा करें।

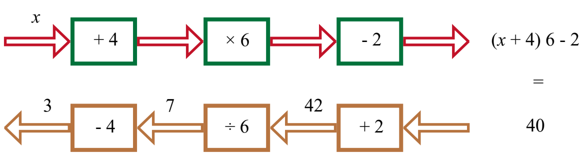
गतिविधि 10

उद्देश्य : तीन चरणों वाली मशीन में किए गए कार्य को 'पूर्ववत करना' सीखने में बच्चों की मदद करना।

शिक्षक इस तरह की एक मशीन बना सकते हैं, जैसे कि नीचे दी गई है।

$$+ 4 \times 6 - 2$$

यहाँ तीन मशीनों की एक शृंखला दी गई है।



अब पूछें कि 'यदि हम मशीन में 5 डालेंगे तो क्या निकलेगा?'

यदि मशीन का आउटपुट 40 है, तो आप इसे समीकरण के रूप में कैसे व्यक्त करेंगे?

इस बात की ओर ध्यान दिलाएँ कि इस समीकरण के लिए कोष्ठकों के उपयोग की आवश्यकता है क्योंकि दोनों संख्याओं के योग को 6 से गुणा किया जा रहा है।

$$(x + 4) \times 6 - 2 = 40$$

इसे 'पूर्ववत' कैसे किया जाए?

40 प्राप्त करने के लिए की गई अन्तिम संक्रिया 2 को घटाना है।

40 + 2 हुआ 42

पिछली संक्रिया 6 से गुणा है जिससे 42 मिला

42 ÷ 6 हुआ 7

इससे पहले की संक्रिया 4 का जोड़ है जिससे हमें 7 मिला।

7 – 4 हुआ 3

इसलिए $x = 3$

शिक्षक विभिन्न मशीनों के चित्र बना सकते हैं और प्रत्येक मशीन के लिए एक आउटपुट निर्धारित कर सकते हैं और बच्चे उनके लिए सम्बन्धित इनपुट खोज सकते हैं।

गतिविधि 11

उद्देश्य : समीकरण वाले इबारती सवालों (कोष्ठकों के उपयोग के साथ) को सन्तुलन पद्धति से हल करने में बच्चों की मदद करना।

उदाहरण : यश के पास 15 डाक टिकट हैं। आसिफ़ के पास 17 टिकट हैं।

यश ने आसिफ़ को कुछ टिकट दीं। अब आसिफ़ के पास यश से 3 गुना ज़्यादा टिकट हैं। यश ने आसिफ़ को कितनी टिकट दीं?

इसे हल करने के लिए प्रयत्न और त्रुटि विधि का एक तरीक़ा यहाँ दिया गया है :

यश द्वारा दी गई टिकट	यश के पास टिकटों की संख्या	आसिफ़ के पास टिकटों की संख्या
0	15	17
1	14	18
2	13	19
3	12	20

क्या किसी भी पंक्ति में आसिफ़ के पास यश से 3 गुना ज़्यादा टिकट हैं? अभी तक तो नहीं।

किसी और तरीक़े का इस्तेमाल करना ज़्यादा प्रभावी होगा।

बच्चे अपनी समझ में बढ़ोत्तरी के लिए शुरू में चित्र बना सकते हैं।

मान लो कि यश द्वारा आसिफ़ को दी गई टिकटों की संख्या x है।

यश		**आसिफ़**
15		17
$15 - x$		$17 + x$
$3\,(15 - x)$	=	$17 + x$

अब यश के पास कितनी टिकट होंगी? $15 - x$

आसिफ़ के पास कितनी टिकट होंगी? $17 + x$

सवाल में दिया गया है कि आसिफ़ के पास यश से 3 गुना हैं।

$$17 + x = 3\,(15 - x)$$

हम इस समीकरण को कैसे हल करें?

आइए, हम पहले कोष्ठकों का गुणा करें।

$$17 + x = 45 - 3x$$

इस चरण के बाद, बच्चे इस पर अलग-अलग तरीक़ों से काम कर सकते हैं।

एक तरीक़ा यह है :

$$17 + x + 3x = 45 - 3x + 3x,$$

$$17 + 4x = 45,$$

$$17 + 4x - 17 = 45 - 17,$$

$$4x = 28,$$

$$x = 7$$

गतिविधि 12

उद्देश्य : समीकरणों वाले इबारती सवालों को मशीन पद्धति या पूर्ववत करने की विधि द्वारा हल करने में बच्चों की मदद करना।

उदाहरण 1 :

एक बस में पहले स्टॉप पर कुछ यात्री चढ़े। दूसरे स्टॉप पर पाँच और यात्री बस में चढ़े। तीसरे स्टॉप पर बस में उतने ही यात्री और चढ़े जितने कि बस में पहले से थे। चौथे स्टॉप पर तीन यात्री उतर गए। अब बस में 23 यात्री बचे। पहले स्टॉप पर बस में कितने यात्री चढ़े थे?

पहले स्टॉप पर कितने यात्री चढ़े थे? यह अज्ञात है। माना कि यह x है।

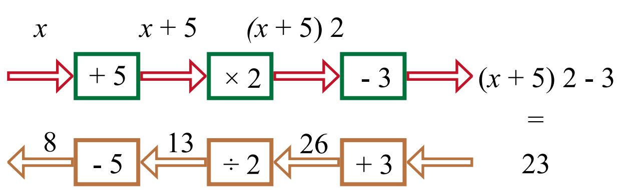
दूसरे स्टॉप पर कितने यात्री चढ़े? 5, तो अब यात्रियों की कुल संख्या $x + 5$ होगी।

तीसरे स्टॉप पर क्या हुआ? यात्रियों की संख्या दोगुनी हो गई। तो यात्रियों की कुल संख्या अब $2\ (x + 5)$ होगी।

चौथे स्टॉप पर क्या हुआ? तीन यात्री उतर गए। यात्रियों की कुल संख्या अब $2\ (x + 5) - 3$ होगी।

अब बस में कितने यात्री बचे हैं? 23

तो $2\ (x + 5) - 3 = 23$



उदाहरण 2 :

एक फल विक्रेता ने प्रत्येक अनार पर एक निश्चित मूल्य लिख दिया। जब उसने पाया कि वह उन्हें उस क़ीमत पर नहीं बेच पा रहा है, तो उसने क़ीमत में 4 रुपए की छूट दे दी। फिर उसने उनमें से 15 अनारों को 390 रुपए में बेचा। उसके द्वारा अनार पर लिखी गई क़ीमत क्या थी?

उसके द्वारा लिखी गई क़ीमत क्या थी? यह अज्ञात है, माना कि यह x है।

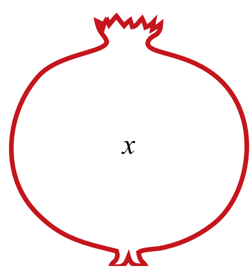
छूट देने के बाद क़ीमत क्या थी? $x - 4$

उसने कितने अनार बेचे? 15

छूट के बाद 15 अनारों की क़ीमत? $15\ (x - 4)$

उसने कितना कमाया? 390 रुपए

इसलिए $15\ (x - 4) = 390$

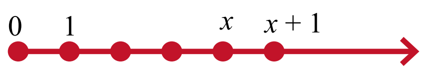


गतिविधि 13

उद्देश्य : बच्चों को विभिन्न प्रकार के इबारती सवालों (जिनमें एक ओर चर राशि हो) से अवगत कराना।

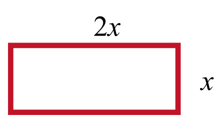
सवालों को समझने में मदद करने के लिए बच्चों को जानकारी को दर्शाने के विभिन्न तरीक़े सिखाएँ।

दो क्रमागत संख्याओं का योग 83 है। संख्याओं का पता लगाएँ।



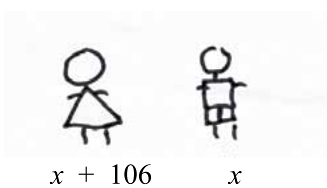
$$x + x + 1 = 83$$

एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दोगुनी है। यदि उसका परिमाप 72 सेंटीमीटर है, तो आयत की लम्बाई और चौड़ाई का पता लगाएँ।



$$2x + x + 2x + x = 72$$

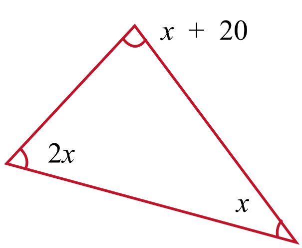
एक स्कूल में 650 बच्चे हैं। अगर लड़कियों की संख्या लड़कों की तुलना में 106 अधिक है, तो स्कूल में कितने लड़के हैं?



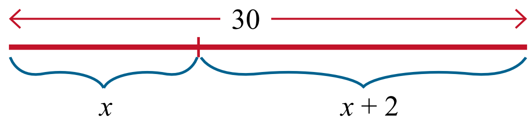
$$x + x + 106 = 650$$

त्रिभुज का एक कोण A, दूसरे कोण B से दोगुना बड़ा है। तीसरे कोण का माप, कोण B के माप से 20 डिग्री अधिक है। त्रिभुज के तीनों कोणों के माप का पता लगाएँ।

चूँकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 होता है, इसलिए

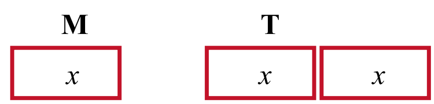


एक इलेक्ट्रीशियन 30 फीट लम्बाई के तार को दो टुकड़ों में काटता है। एक टुकड़ा दूसरे से 2 फीट लम्बा है। दोनों टुकड़ों की लम्बाई कितनी है?



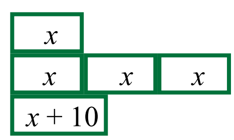
$$x + x + 2 = 30$$

सोमवार को एक स्कूल के भोजन कक्ष में कुछ बच्चे मौजूद थे। मंगलवार को उससे दोगुने बच्चे मौजूद थे। गिनती करने पर मंगलवार को कुल 230 बच्चे थे। तो सोमवार को कितने बच्चे थे?



$$2x = 230$$

तन्वी के पास कुछ कंचे हैं। सोनिया के पास, तन्वी से तीन गुना ज़्यादा कंचे हैं। एमी के पास तन्वी से 10 अधिक कंचे हैं। एमी के पास 25 कंचे हैं। तो उनके पास कुल मिलाकर कितने कंचे हैं?



$$x + 10 = 25$$

कक्षा 5 में कक्षा 6 की तुलना में एक बच्चा अधिक है। कक्षा 4 में, कक्षा 5 की तुलना में तीन बच्चे कम हैं।

कक्षा 4, 5 और 6 में कुल मिलाकर 92 बच्चे हैं। प्रत्येक कक्षा में कितने बच्चे हैं?

कक्षा 4	कक्षा 5	कक्षा 6
$x + 1 - 3$	$x + 1$	x

$$x + 1 - 3 + x + 1 + x = 92$$

अर्श का वज़न युग से 8 किलो अधिक है। यदि उनके वज़न का योग 80 किलोग्राम है तो उनका अलग-अलग वज़न ज्ञात करें।

एक खेत पर कुछ मुर्गियाँ और भेड़ें थीं। कुल मिलाकर वहाँ 8 सिर और 22 पैर थे। खेत पर कितनी मुर्गियाँ थीं?

पहेलियाँ!

तीन बाल्टियाँ हैं : एक लाल, एक नीली और एक पीली। प्रत्येक बाल्टी में अधिकतम 5 लीटर तरल रखा जा सकता है। तरल पदार्थ को पूरी सावधानी के साथ लीटर की पूर्ण संख्या में मापा गया है और बाल्टियों में डाला गया है। हर बाल्टी में तरल की मात्रा (लीटर में) अलग-अलग है। यदि लाल बाल्टी के तरल को नीले रंग की बाल्टी में डाला जाता है, तो नीली बाल्टी में पीली बाल्टी के बराबर तरल हो जाता है। पीली बाल्टी का आधा तरल, लाल बाल्टी के तरल के दुगुने के बराबर है। प्रत्येक बाल्टी में कितना तरल पदार्थ है?

सैम की दादी चेरी बन्स बनाने का एक पुराना नुस्ख़ा जानती हैं। इसके लिए वह पहले दो अण्डों का वज़न करती हैं। फिर वह उतने ही वज़न का आटा, चीनी और मक्खन लेती हैं। फिर वह इन सबको एक साथ मिलाती हैं और कटी हुई चैरी में 2 अण्डों के वज़न का आधा भाग मिलाती हैं। पेपर केक के 12 साँचों में से प्रत्येक में 45 ग्राम सामग्री डालने के लिए उनके पास पर्याप्त मिश्रण है। एक अण्डे का वज़न कितना था?

आभार : पहेलियों का स्रोत : nrich (https://nrich.maths.org/)



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू भाषा पढ़ाती हैं। पिछले कुछ वर्षों से वह शिक्षक आउटरीच कार्य में संलग्न हैं। वर्तमान में वह पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर एससीईआरटी (आन्ध्र प्रदेश) के साथ काम कर रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया है। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से भी जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics) नवम्बर 2018 में प्रकाशित Approaches to Equations का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही